Equations Différentielles d'ordre 1

Généralités

En mathématiques, une **équation différentielle** est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différenciation auquel une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

Ainsi l'étude d'une population isolée, dans un milieu produisant de la nourriture en abondance, conduit au modèle suivant pour l'effectif *x* en fonction du temps *t :*

$$x'(t) = K\,x(t)$$

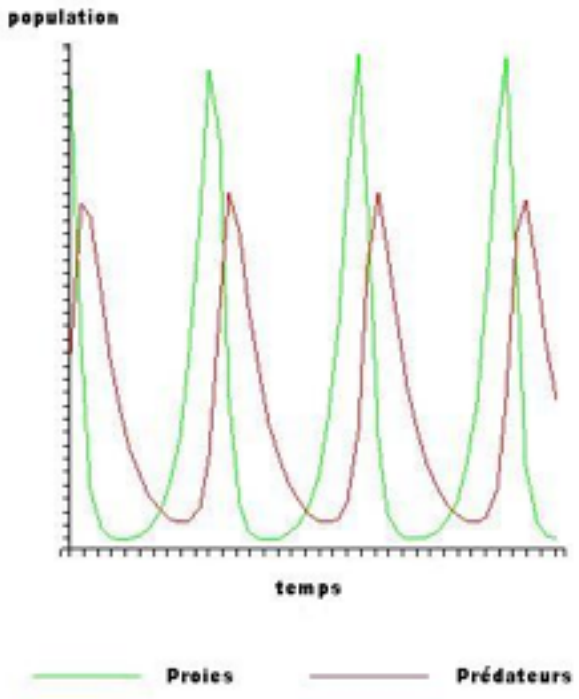
Généralités

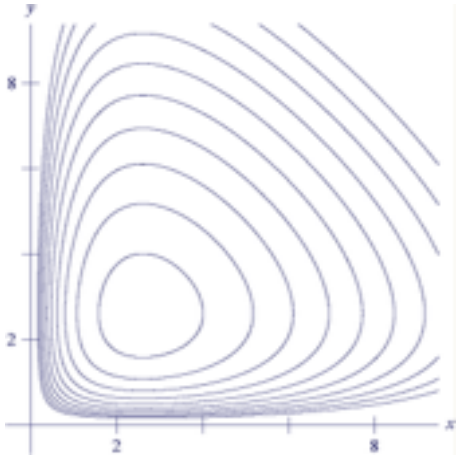
Un système plus complexe, formé de deux espèces, proie et prédateur, conduit aux [équations de Lotka-Volterra](#) :

$$\begin{cases} x'(t) &= A\,x(t) - B\,x(t)\,y(t) \\ y'(t) &= -C\,y(t) + D\,x(t)\,y(t) \end{cases}$$

Effectif des prédateurs

Effectif des proies





Définition

Les **équations différentielles linéaires d'ordre un** sont des équations différentielles de la forme :

$$ay' + by = c$$

Où *y* est une fonction.

Ces équations peuvent être résolues par des procédés systématiques, faisant appel au calcul de primitives. Dans certains cas particuliers, par exemple lorsque *c* est nul (**on parle alors d'équations différentielles linéaires homogènes**), on peut espérer obtenir des expressions explicites des solutions à l'aide des fonctions usuelles.

Equations à Coefficients Constants

Ce sont les équations qui se ramènent à $y' = ky$ où k est un réel. On rencontre ce type d'équations :

• avec k négatif dans la modélisation de la décroissance radioactive dans un milieu homogène et fermé ;
• avec k positif lors de la modélisation de la croissance d'une population.

Les solutions d'une telle équation sont les fonctions définies sur t$\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = Ce^{kx}$$

où C est un réel dont la valeur se détermine dès que sont connues les conditions initiales : si pour x_0 on a $f(x_0) = y_0$ alors :

$$C = y_0 e^{-kx_0}$$

Cas Général

Dans le cas général, l'équation différentielle linéaire homogène s'écrit :

$$a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = 0$$

En travaillant sur un intervalle *I* où *a*(*x*) ne s'annule pas, cette équation est équivalente à :

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)} \cdot y = 0$$

Et, en notant $A(x)$ une primitive de la fonctic$\frac{b(x)}{a(x)}$, c'est-à-dir$A'(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)} \cdot y = 0$$

$$y' \cdot e^{A(x)} + y \cdot \frac{b(x)}{a(x)} \cdot e^{A(x)} = 0$$

$$y' \cdot e^{A(x)} + y \cdot A'(x) \cdot e^{A(x)} = 0$$

Cas Général

Cette forme est du type $u' \cdot v + u \cdot v'$ qui se simplifie $(u \cdot v)'$

$$\begin{cases} u(x) = y(x) \\ \text{avec} \\ v(x) = e^{A(x)} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y \cdot e^{A(x)}) = 0$$

$$y \cdot e^{A(x)} = C$$

$$y(x) = C \cdot e^{-A(x)}$$

où *C* est une constante réelle dont la valeur se détermine par la donnée des conditions initiales.
Le calcul de primitive nécessaire n'est pas toujours réalisable à l'aide des fonctions usuelles, la solution peut donc n'avoir qu'une expression sous forme d'intégrale.

Avec un Second Membre

Si l'équation différentielle possède un second membre (si c est une fonction non nulle), il suffit de trouver *une* solution particulière f_0 de l'équation pour les connaître toutes. En effet, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $f_0 + g$ où g est une solution générale de l'équation homogène.

Le problème est souvent de déterminer cette solution particulière.

Si c est la somme de plusieurs fonctions c_1 et c_2, on peut chercher une solution particulière de l'équation différentielle de second membre c_1, puis une solution particulière de l'équation différentielle de second membre c_2, puis faire la somme de ces deux solutions particulières. On obtient alors une solution particulière de l'équation de départ.

Constantes non nulles a, b, c

Nous obtenons des équations du type $y' = my + p$. Ces équations servent à modéliser, par exemple, la charge ou la décharge d'un condensateur dans un circuit RC.

L'ensemble des solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = Ce^{mx} - \frac{p}{m}$$

où C est un réel se déterminant par la donnée des conditions initiales, par exemple, $f(x_0) = y_0$, ce qui donne alors :

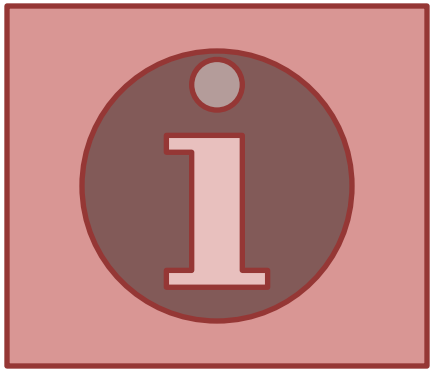
$$f(x) = (y_0 + \frac{p}{m})e^{-mx_0}e^{mx} - \frac{p}{m}$$

a et b constantes non nulles et c fonction polynôme ou trigo

On cherchera alors une solution particulière de la forme :

- d'un polynôme de degré n si c est un polynôme de degré n ;
- d'une combinaison linéaire de $\cos(\omega x + \phi)$ et $\sin(\omega x + \phi)$ si $c(x) = A\cos(\omega x + \phi) + B\sin(\omega x + \phi)$.

Exemples



Exercices

Cas général

On résout de manière générale une équation avec second membre $ay' + by = c$ par la méthode de variation des constantes. Celle-ci consiste à se ramener, par un changement de fonction variable, à un problème de calcul de primitive.

On suppose que, sur l'intervalle d'étude, la fonction a ne s'annule pas.

On écrit la solution générale de l'équation homogène associée $ay' + by = 0$

$$y(x) = Ke^{-A(x)}, K \in \mathbb{R},$$

on prend pour nouvelle fonction variable la fonction k définie par la relation

$$y(x) = k(x)e^{-A(x)},$$

ce qui explique la formulation imagée : on fait « varier la constante », en fait on la remplace par une fonction.

Cas général

En reportant dans l'équation initiale, on obtient une équation équivalente à l'équation initiale mais portant sur *k*

$$a(x)k'(x) = c(x)e^{A(x)}$$

En notant B une primitive de la fonctio$\frac{ce^A}{a}$ l'ensemble des solutions est

$$k(x) = B(x) + C$$

La solution générale s'écrit alors sous la forme

$$f(x) = (B(x) + C)e^{-A(x)}$$

$$f = \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x\right)\left\{C + \int \frac{c(x)}{a(x)}\exp\left(\int \frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right\}$$

De nouveau, il faut réaliser un calcul de primitive, ce qui peut empêcher de donner l'expression de la solution à l'aide des fonctions usuelles.